

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Физический факультет

Кафедра физики частиц и космологии

Курсовая работа

Излучение гравитационных волн космическими доменными стенками

студента 443-й группы
Данковского Ивана Дмитриевича

Научный руководитель
доктор физ.-мат. наук, член-корр. РАН, г.н.с. ОТФ ИЯИ РАН
Горбунов Дмитрий Сергеевич

Научный консультант
Бабичев Евгений

Научный консультант
Викман Александр

Научный консультант
Рамазанов Сабир

Москва
2024

Содержание

1. Введение	2
2. Скейлинг-режим	2
3. Численные симуляции поля на решетке	6
4. Результаты: эволюция системы доменных стенок	10
5. Результаты: гравитационные волны	14
6. Итоги	20

1. Введение

Доменные стенки возникают в различных моделях физики частиц за пределами Стандартной модели, в которых возможно спонтанное нарушение дискретной симметрии. Доменные стенки являются космологически неприемлемыми, так как они создают большую плотность энергии, которая падает медленнее, чем плотность энергии радиации или материи. Это проблема может быть решена выбором начальных условий, или рассмотрением доменных стенок, поверхностная плотность энергии которых падает со временем. В данной работе рассмотрены доменные стенки с постоянным натяжением, и мы не обсуждаем проблемы доменных стенок, предполагая, что она решается тем или иным путём, и система доменных стенок разрушается в какой-то момент в ранней Вселенной.

Мы рассматриваем модель, описываемую действием

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - \eta^2)^2 \right]. \quad (1)$$

Для простоты мы не включаем слагаемое с температурой, которое, как правило, необходимо для того, чтобы сделать поле ϕ нулевым в ранней Вселенной. Здесь мы не рассматриваем механизм, зануляющий поле в ранней Вселенной и предполагаем, что поле начинает скатывание, как только параметр Хаббла становится равным массе поля, т.е. $H_i \simeq \sqrt{\lambda} \eta$.

Некоторые аспекты эволюции доменных стенок и излучения ими гравитационных волн весьма интересны для изучения. В частности, интересна форма спектра для частот выше пиковой. В работе [1] спектр гравитационных волн резко падает после пика, в то время как в других симуляциях виден плоский спектр на промежуточных частотах. В этой работе все численные симуляции были выполнены с помощью компьютерного кода CosmoLattice. Предыдущие симуляции [2] с помощью этого кода показывали сильное отклонение от [1], а именно наличие сильного пика в ультрафиолетовой части спектра. Мы доказываем, что этот пик является артефактом ограниченного разрешения из-за конечного шага решетки. Нами предложен возможный путь получения достоверных результатов при такой проблеме.

2. Скейлинг-режим

2.1. Доменные стенки в режиме скейлинга

Рассмотрим некоторую величину с нулевым средним, описывающую систему доменных стенок $s(\mathbf{x})$ и характеризуемую нормированной двухточечной функцией

$$\frac{\langle s(\mathbf{x}, \tau) s(\mathbf{y}, \tau') \rangle}{\sqrt{\langle s^2(\mathbf{x}, \tau) \rangle \langle s^2(\mathbf{y}, \tau') \rangle}} \equiv F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau, \tau'). \quad (2)$$

Учитывая свойства статистической однородности и изотропии, можно записать

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau, \tau') = F(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \tau, \tau'). \quad (3)$$

Как следствие этого свойства, в терминах Фурье-преобразованных переменных,

$$s(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \cdot s(\mathbf{x}) . \quad (4)$$

корреляционная функция может быть записана как

$$F(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \tau, \tau') = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q}) P(k, \tau, \tau') , \quad (5)$$

где

$$P(k, \tau, \tau') = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\mathbf{z} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{z}} F(z, \tau, \tau') , \quad (6)$$

где $\mathbf{z} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{y}$ и $z \equiv |\mathbf{z}|$. Из последнего можно получить поведение функции $P(k, \tau, \tau')$ в инфракрасном пределе $k \rightarrow 0$. А именно, правая часть должна оставаться конечной на пространственной бесконечности $z \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \rightarrow \infty$ из-за принципа причинности. Действительно, корреляция случайных величин $s(\mathbf{x})$ и $s(\mathbf{y})$ должна быть экспоненциально подавлена, если они причинно не связаны, то есть $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ превосходит размер горизонта в соответствующие времена τ и τ' . Это также должно оставаться верным при $k \rightarrow 0$. Таким образом,

$$P(k, \tau, \tau') \big|_{k \rightarrow 0} \rightarrow C(\tau, \tau') , \quad (7)$$

где $C(\tau, \tau') < \infty$ является ограниченной функцией времен τ и τ' . Это будет важным при обсуждении инфракрасной части спектра гравитационных волн.

Существуют доказательства того, что система доменных стенок входит в скейлинг-режим через некоторое время после образования. Система начинает эволюционировать в режиме самоподобия, так, что число доменных стенок в объеме Хаббла остается постоянным. Другими словами, корреляционная функция, описывающая эволюцию системы, задается как

$$\frac{\langle s(\mathbf{x}, \tau) s(\mathbf{y}, \tau') \rangle}{\sqrt{\langle s^2(\tau) \rangle} \sqrt{\langle s^2(\tau') \rangle}} = F\left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{\sqrt{\tau\tau'}}\right) . \quad (8)$$

Это простейшее возможное выражение, которое можно записать при предположениях пространственной однородности и изотропии, но отнюдь не самое общее. Оно не учитывает возможную зависимость от параметров модели, а также зависимость от начальных условий. Тем не менее, можно предполагать, что система приходит к равновесию в некоторый момент благодаря слагаемому, отвечающему за самодействие. Приход к равновесию указывает на наличие механизма, ответственного за уменьшение плотности энергии системы доменных стенок, например, через излучение частиц и/или гравитационных волн.

Одним из следствий скейлинг-режима является постоянство числа доменных стенок в объеме Хаббла. Можно оценить плотность энергии доменных стенок

$$\rho_{dw} \sim (\sigma_{dw} \cdot H^{-2}) / H^{-3} \sim \sigma_{dw} H . \quad (9)$$

где σ_{dw} — натяжение доменных стенок — определено как

$$\sigma_{dw} = \frac{2\sqrt{2}\lambda\eta^3}{3}. \quad (10)$$

В результате система доменных стенок начинает определять эволюцию Вселенной, если их натяжение не является очень малым, или если не существует механизма их аннигиляции в ранней Вселенной.

Предположение скейлинга накладывает важные ограничения на форму корреляционной функции $P(k\tau, k\tau')$, которую запишем как

$$P(k, \tau, \tau) = \tau^3 \cdot \mathcal{P}(k\tau), \quad (11)$$

где мы ввели безразмерный спектр мощности $\mathcal{P}(k\tau)$. Это приведет к важным для излученных гравитационных волн следствиям. Необходимо рассмотреть обобщение корреляционной функции на неодинаковые времена. Самым естественным обобщением будет

$$P(k, \tau, \tau') = (\tau\tau')^{3/2} \cdot \mathcal{P}(k\tau, k\tau'). \quad (12)$$

2.2. Плотность энергии гравитационных волн в режиме скейлинга

Уравнение движения, описывающее излучение гравитационных волн, выглядит как

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + 2\frac{a'}{a} \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} \right) h_{ij} = 16\pi G a^2(\tau) \Pi_{ij}(\mathbf{x}, \tau), \quad (13)$$

где h_{ij} — бесследовая поперечная часть возмущения метрики, и

$$\Pi_{ij}(\mathbf{x}, \tau) = \frac{1}{a^2(\tau)} \Lambda_{ij,kl} T_{kl}(\mathbf{x}, \tau) \quad (14)$$

— бесследовая поперечная часть тензора энергии-импульса. Мы снова переходим к переменным в пространстве Фурье и производим разбиение на поляризации:

$$h_{ij}(\mathbf{k}, \tau) = \sum_A e_{ij}^A(\mathbf{k}) h_A(\mathbf{k}, \tau), \quad (15)$$

$$\Pi_{ij}(\mathbf{k}, \tau) = \sum_A e_{ij}^A(\mathbf{k}) \Pi_A(\mathbf{k}, \tau). \quad (16)$$

Решение уравнения движения в радиационно-доминированной Вселенной выглядит как

$$h_A(\mathbf{k}, \tau) = \frac{16\pi G}{a(\tau)k} \int_{\tau_i}^{\tau} d\tau' a^3(\tau') \sin k(\tau - \tau') \Pi_A(\mathbf{k}, \tau'). \quad (17)$$

Плотность энергии гравитационных волн выражается как

$$\rho_{gw}(\mathbf{x}, \tau) = \frac{1}{32\pi G a^2(\tau)} \left\langle \frac{\partial h_{ij}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} \frac{\partial h_{ij}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} \right\rangle, \quad (18)$$

где усреднение происходит по множеству реализаций источника. Объединяя всё вместе, получим

$$\begin{aligned} \rho_{gw}(\tau) &= \frac{8\pi G}{a^4(\tau)} \int d\mathbf{k} d\mathbf{q} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{q})\mathbf{x}} e_{ij}^A(\mathbf{k}) e_{ij}^{A'}(\mathbf{q}) \cdot \int_{\tau_i}^{\tau} \int_{\tau_i}^{\tau} d\tau' d\tau'' a^3(\tau') a^3(\tau'') \langle \Pi_A(\mathbf{k}, \tau') \Pi_{A'}(\mathbf{q}, \tau'') \rangle \times \\ &\times \left[\frac{1}{k^2 \tau^2} \sin k(\tau - \tau') \sin q(\tau - \tau'') - \frac{1}{k\tau} \sin(k\tau + q\tau - k\tau' - q\tau'') + \cos k(\tau - \tau') \cos q(\tau - \tau'') \right] \end{aligned} \quad (19)$$

Основываясь на предшествующем анализе, можно записать для корреляционной функции в правой части:

$$\langle \Pi_A(\mathbf{k}, \tau') \Pi_{A'}(\mathbf{q}, \tau'') \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \delta_{AA'} C \sigma_{dw}^2 H(\tau') H(\tau'') \cdot (\tau' \tau'')^{3/2} \cdot \mathcal{P}(\sqrt{k^2 \tau' \tau''}). \quad (20)$$

Здесь мы предполагаем, что величина $\sqrt{\langle \Pi_{ij}^2(\tau) \rangle}$ эволюционирует со временем как плотность энергии доменных стенок $\rho_{dw} \sim \sigma H$, то есть, $\langle \Pi_{ij}^2(\tau) \rangle = C \rho_{dw}^2(\tau)$, где C постоянна во времени. Это можно понять из того, что $\rho_{dw} = T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \sim T_{ij} v^i v^j = \frac{1}{a^2} T_{ij} (av^i)(av^j)$. Сравниваем это с $\Pi_{ij} \sim \frac{1}{a^2} T_{ij}$. Далее мы используем тот факт, что доменные стенки движутся с релятивистскими скоростями, так что $av^i \sim 1$. Таким образом, $\Pi_{ij} \sim \rho_{dw}$.

Наконец, мы получаем

$$\begin{aligned} \rho_{gw}(\mathbf{x}, \tau) &= 1024\pi^5 C G \sigma_{dw}^2 \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^5} \int_{\xi_i}^\xi \int_{\xi_i}^\xi d\xi' d\xi'' (\xi' \cdot \xi'')^{5/2} \cdot \mathcal{P}(\sqrt{\xi' \xi''}) \times \\ &\times \left[\frac{1}{\xi^2} \sin(\xi - \xi') \sin(\xi - \xi'') - \frac{1}{\xi} \sin(2\xi - \xi' - \xi'') + \cos(\xi - \xi') \cos(\xi - \xi'') \right], \end{aligned} \quad (21)$$

где мы определили $\xi \equiv k\tau$, $\xi' \equiv k\tau'$ и $\xi'' \equiv k\tau''$. Можно легко заметить, что интеграл в правой части имеет хорошие свойства сходимости. Его единственная временная зависимость приходит из зависимости от $\xi_i = \xi \tau_i / \tau$. Эта временная зависимость пропадает при временах $\tau \gg \tau_i$, и можно с уверенностью положить $\xi_i = 0$, так что

$$\rho_{gw}(\tau) = \text{const} \quad \tau \gg \tau_i. \quad (22)$$

Принимая во внимание будущие симуляции на решетке, отметим также, что интегрирование по ξ на практике начинается не с нуля, потому что импульс k , как правило, ограничен снизу размером решетки. Это также вносит небольшую временную зависимость, которая исчезает в пределе бесконечной решетки. Плотность энергии гравитационных волн перестает быть постоянной во времени после разрушения доменных стенок, и в этом случае мы получаем стандартную зависимость от времени для излучения $\rho_{gw}(\tau) \propto 1/a^4(\tau)$.

Общее выражение для формы спектра гравитационных волн выглядит как

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{gw}}{d \ln k} &= \frac{1024\pi^5 CG\sigma_{dw}^2 k^3}{a^4(\tau)} \cdot \int_{\tau_i}^{\tau} \int_{\tau_i}^{\tau} \frac{d\tau'}{\tau'} \frac{d\tau''}{\tau''} a^2(\tau') a^2(\tau'') P(k, \tau', \tau'') \times \\ &\times \left[\frac{1}{k^2 \tau^2} \sin k(\tau - \tau') \sin k(\tau - \tau'') - \frac{1}{k\tau} \sin(2k\tau - k\tau' - k\tau'') + \cos k(\tau - \tau') \cos k(\tau - \tau'') \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Отметим, что осциллирующее выражение в квадратных скобках здесь не зависит от k в пределе $k \rightarrow 0$. Это же верно для функции $P(k, \tau', \tau'')$, как было показано ранее. Мы приходим к хорошо известному факту: для $k\tau \ll 1$, форма спектра задается как

$$\frac{d\rho_{gw}}{d \ln k} \propto k^3. \quad (24)$$

Подчеркнем, что это выражение получено независимо от предположения о скейлинг-режиме.

3. Численные симуляции поля на решетке

3.1. Безразмерные переменные

Далее мы переходим к конформному времени $d\tau = dt/a(t)$. Удобно также перейти к безразмерным переменным, определенным как

$$\tilde{\tau} = \sqrt{\lambda\eta} \cdot \tau \quad \tilde{x}_i = \sqrt{\lambda\eta} \cdot x_i \quad \tilde{\phi} = \frac{\phi}{\eta}. \quad (25)$$

В терминах переопределенного конформного времени, можно записать масштабный фактор $a(\tau)$ как

$$a(\tau) = \frac{\sqrt{\lambda\eta}}{H_i} \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\tau}_i^2}. \quad (26)$$

Мы можем выбрать начальный момент времени как

$$\tilde{\tau}_i = 1 \quad (27)$$

и определить

$$\tilde{a}(\tilde{\tau}) = \tilde{\tau}. \quad (28)$$

Тогда можно переписать (26) как

$$a(\tau) = \frac{\sqrt{\lambda\eta}}{H_i} \tilde{a}(\tilde{\tau}), \quad (29)$$

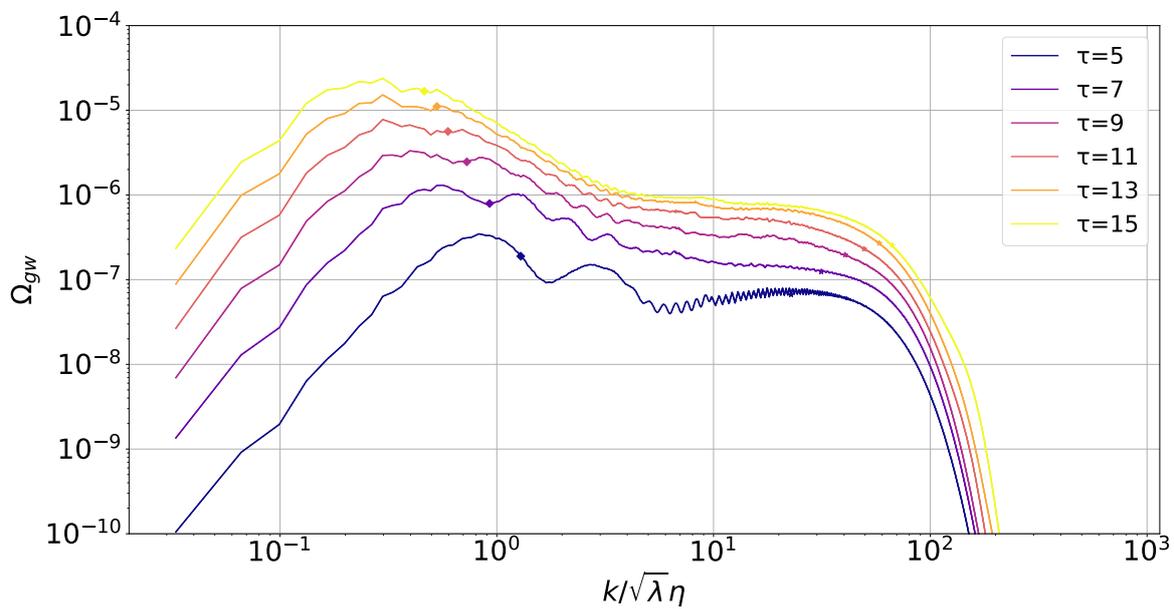
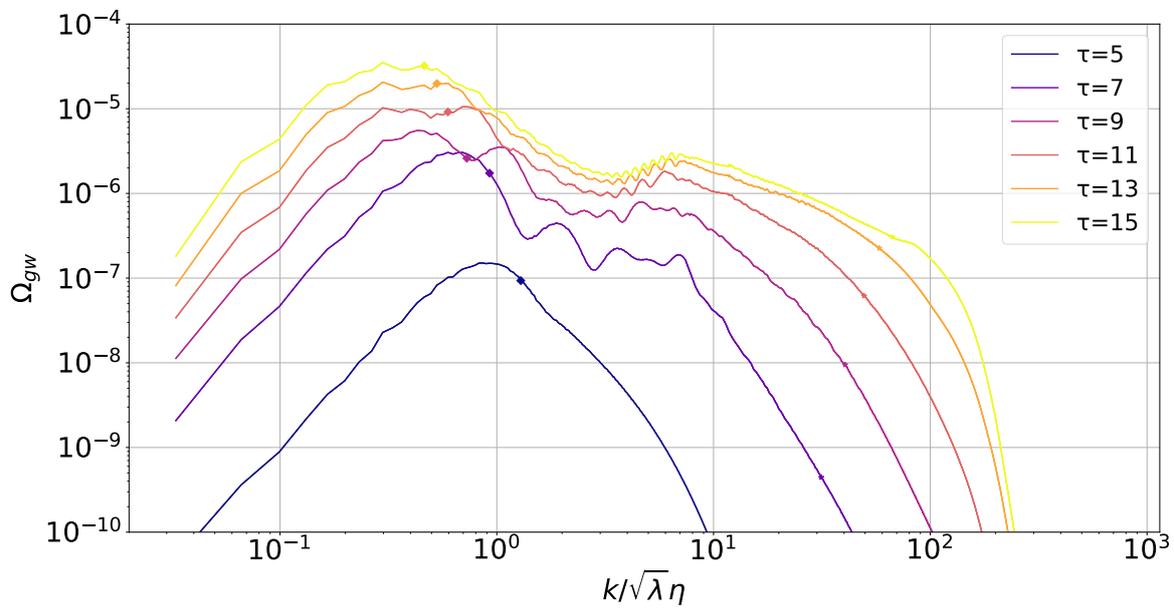


Рис. 1. Спектр гравитационных волн, излученных системой доменных стенок, в случае вакуумных (верхний спектр) и термальных (нижний спектр) начальных условий.

где H_i – параметр Хаббла в начальный момент времени τ_i . Тогда можно записать уравнения движения (переходя от обозначений с тильдой к обозначениям без нее)

$$\phi'' + \frac{2a'}{a}\phi' - \partial_i^2\phi + \frac{\lambda\eta^2 a^2(\tau)}{H_i^2} \cdot \phi \cdot (\phi^2 - 1) = 0. \quad (30)$$

Наконец, если мы зафиксируем начальный момент симуляций как

$$H_i = \sqrt{\lambda\eta}, \quad (31)$$

то зависимость от константы самодействия исчезнет. Уравнение движения тогда примет форму

$$\phi'' + \frac{2a'}{a}\phi' - \partial_i^2\phi + a^2(\tau) \cdot \phi \cdot (\phi^2 - 1) = 0. \quad (32)$$

Условие (31) физически обосновано. Действительно: в очень ранней Вселенной $H \gg \sqrt{\lambda\eta}$, и в это время поле ϕ не эволюционирует из-за хаббловского трения. Система начинает эволюцию только когда параметр Хаббла падает до массы ϕ . Это отражено в уравнении (31).

3.2. Начальные условия

Одной из целей данной работы было изучение влияния начальных условий на скейлинг-режим, а именно, на момент времени его установления. Начальные условия в общем случае задаются следующим образом:

$$\langle \phi(\mathbf{k})\phi(\mathbf{q}) \rangle = A(k)\delta(\mathbf{k} + \mathbf{q}) \quad (33)$$

$$\langle \dot{\phi}(\mathbf{k})\dot{\phi}(\mathbf{q}) \rangle = B(k)\delta(\mathbf{k} + \mathbf{q}). \quad (34)$$

В данной модели вакуумные начальные условия являются наиболее естественными

$$A(k) = \frac{1}{2k} \quad B(k) = \frac{k}{2}. \quad (35)$$

В большинстве случаев мы используем обрезанные на импульсе $k = 1$ в безразмерных переменных спектры начальных возмущений.

В принципе, мы можем использовать любые начальные условия, потому что независимо от них предполагается, что система входит в скейлинг-режим, что мы и собираемся продемонстрировать. Например, можно использовать термальные начальные условия

$$A(k) = \frac{1}{k \cdot \left(e^{\frac{k}{T}} - 1\right)} \quad B(k) = \frac{k}{e^{\frac{k}{T}} - 1}. \quad (36)$$

Температуру здесь можно выбрать произвольной, но мы предполагаем, что она определяется из уравнения Фридмана.

3.3. Оптимальные параметры для симуляций

При симуляциях доменных стенок на решетке необходимо следить за двумя главными вещами: i) толщина доменной стенки $\delta_w = \sqrt{2/\lambda/\eta}$ должна быть большой по сравнению с шагом решетки. ii) объем Хаббла не должен превосходить объема симуляции.

Первое условие может быть записано как

$$\delta_w = \sqrt{\frac{2}{\lambda\eta}} = \frac{2L_i}{N} \cdot \frac{a(\tau_f)}{a(\tau_i)}. \quad (37)$$

Фактор '2' в правой части уравнения отвечает за то, что мы рассматриваем лишь случаи, в которых толщина доменной стенки минимум вдвое превосходит шаг решетки. Здесь L_i – физический размер коробки в момент τ_i . Второе условие запишем как

$$H^{-1}(\tau_f) = \frac{L_i}{\alpha} \cdot \frac{a(\tau_f)}{a(\tau_i)}. \quad (38)$$

Здесь мы ввели безразмерный параметр α . Изменяя этот параметр, мы сможем контролировать, в какой степени видны ультрафиолетовая и инфракрасная части спектра. Здесь мы явно предполагаем, что время τ_f такое же, как в уравнении (37). Используя (37), мы можем записать

$$H_i^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda\eta}} = \sqrt{2} \cdot \frac{L_i}{N} \cdot \frac{a(\tau_f)}{a_i}. \quad (39)$$

Поделив (38) на (39), получим

$$\frac{\tau_f}{\tau_i} = \frac{1}{2^{1/4}} \sqrt{\frac{N}{\alpha}}. \quad (40)$$

Тогда (39) может быть записано как

$$H_i^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda\eta}} = \frac{2^{1/4} a(\tau_i) L}{\sqrt{\alpha N}}, \quad (41)$$

что является желаемым ограничением на параметры задачи. Здесь мы переписали L_i через $L_i = a(\tau_i)L$, где L – постоянный сопутствующий размер решетки. В дальнейшем, для определенности, мы выберем следующие значения параметра α :

$$\alpha_0 = 2\pi, \quad \alpha_{IR} = 8\pi, \quad \alpha_{UV} = \frac{\pi}{18}. \quad (42)$$

Значение $\alpha = 2\pi$ является базовым, при котором в спектре гравитационных волн в одинаковой мере видны ИК и УФ части. С другой стороны, при выборе $\alpha_{IR} = 8\pi$, лучше видна ИК часть спектра, в то время как УФ часть видна хуже, и наоборот при выборе $\alpha_{UV} = \pi/18$.

Отметим, что условие (40) ограничивает конечное время симуляций τ_f . В дальнейшем, при обсуждении спектров гравитационных волн, мы будем в основном ссылаться на решетку с $N = 2048$, для которой получим при $\alpha = 2\pi$ конечное время симуляций $\frac{\tau_f}{\tau_i} \simeq 15$.

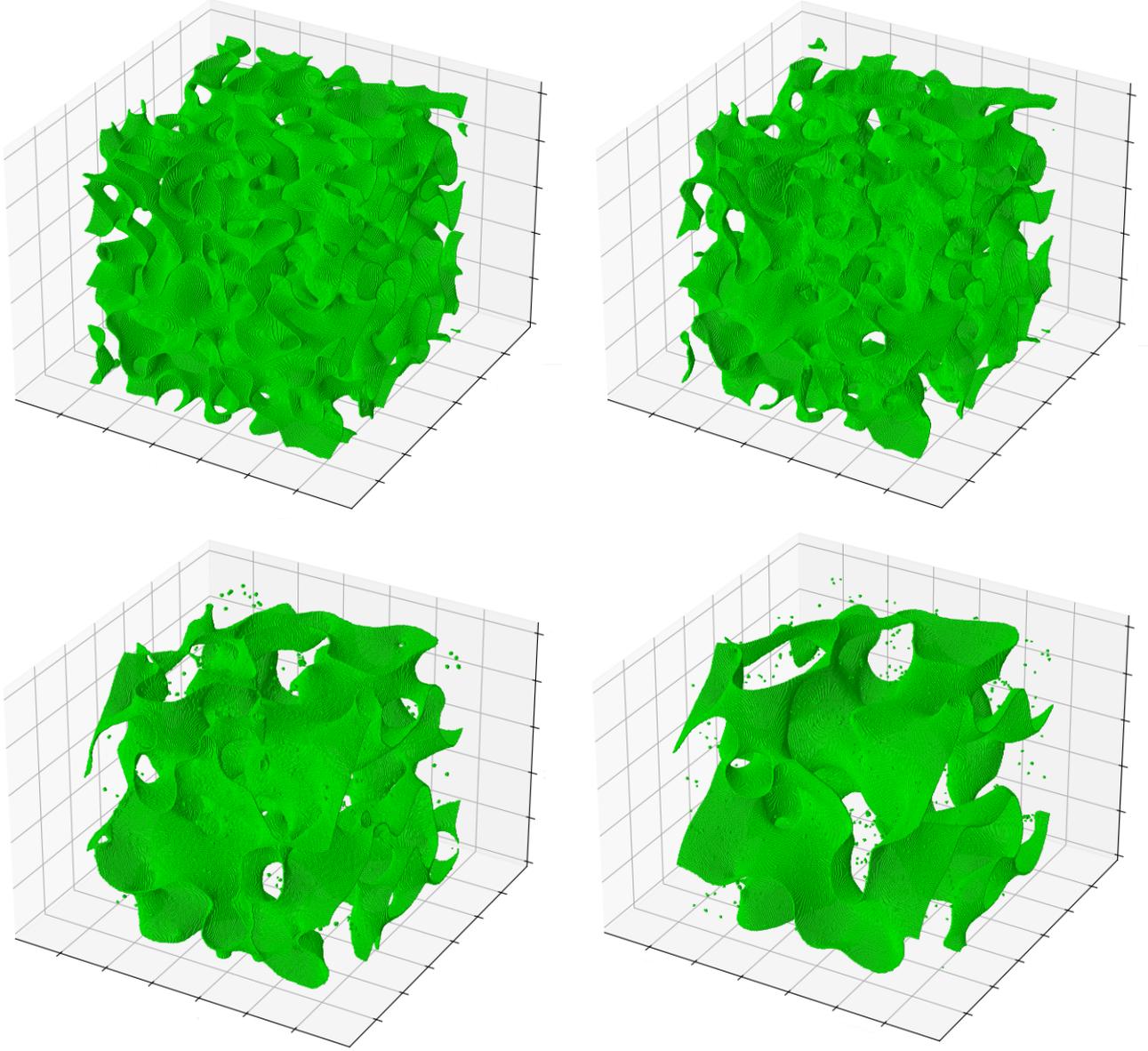


Рис. 2. Конфигурации системы доменных стенок в случае вакуумных начальных условий в моменты $\tau = 3, 7, 11, 15$.

4. Результаты: эволюция системы доменных стенок

Эволюция системы доменных стенок показана на Рис. 2. Видно, что площадь доменных стенок в симулируемом объеме уменьшается. То же самое происходит с плотностью энергии системы доменных стенок, что указывает на наличие механизма уменьшения энергии, который важен при входе системы в скейлинг-режим. Уменьшение энергии в основном происходит через излучение частиц поля ϕ , как показано на Рис. 3. Отметим, что плотность энергии доменных стенок ведет себя как $\rho_{dw} \propto 1/a^2(\tau)$, что согласуется с оценкой ρ_{dw} в скейлинг-режиме $\rho_{dw} \sim \sigma_{dw}H$.

Плотность энергии системы доменных стенок может быть записана как

$$\rho_{dw} = \frac{\sigma_{dw}A}{a(t)V}, \quad (43)$$

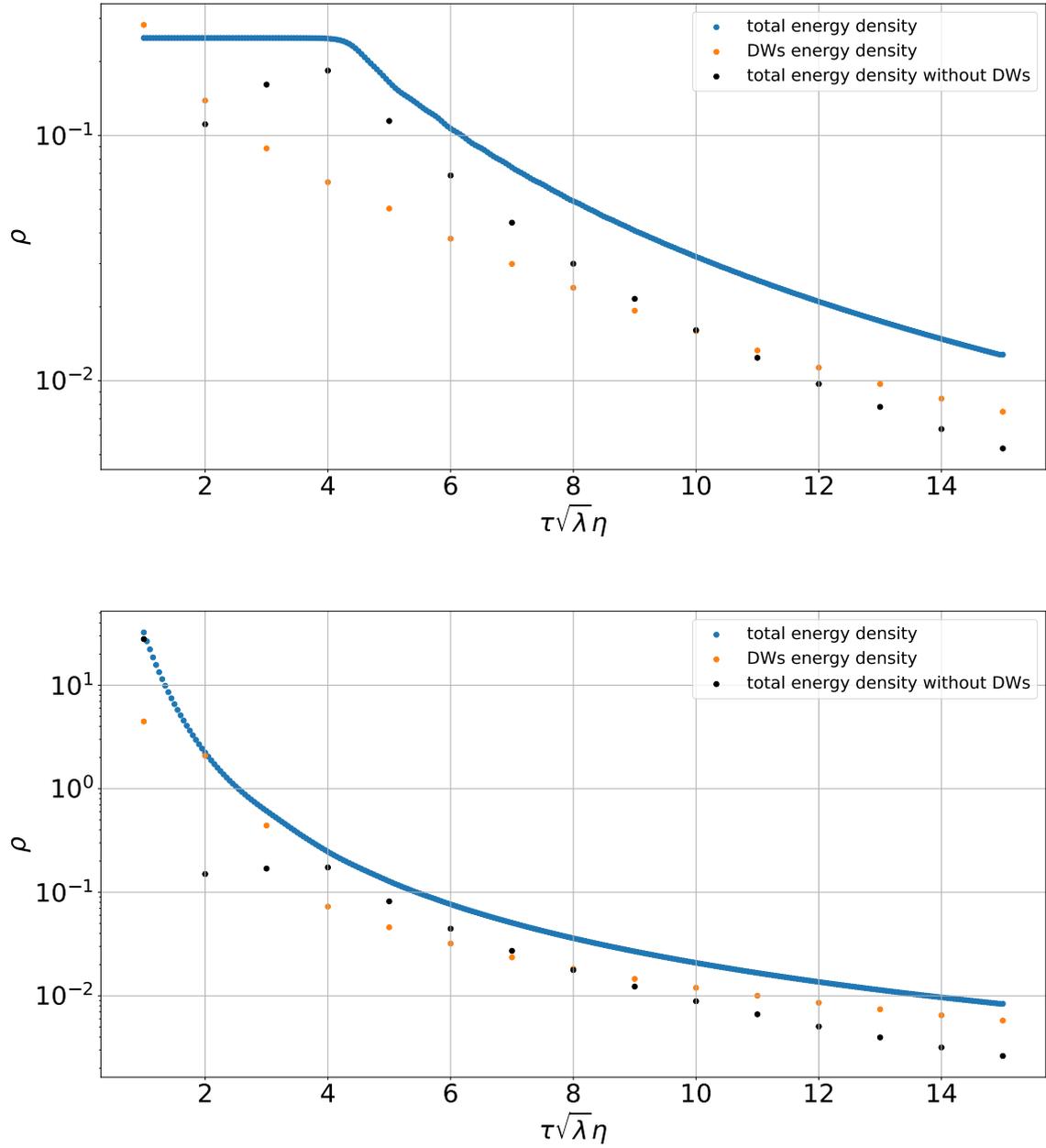


Рис. 3. Полная плотность энергии поля ϕ , плотность энергии доменных стенок и плотность энергии излученных частиц поля ϕ для вакуумных (сверху) и термальных (снизу) начальных условий.

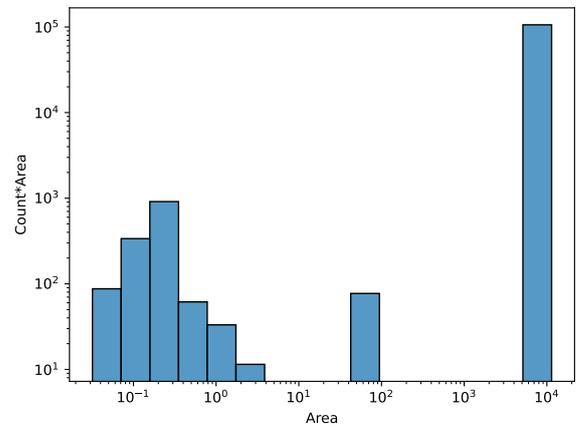
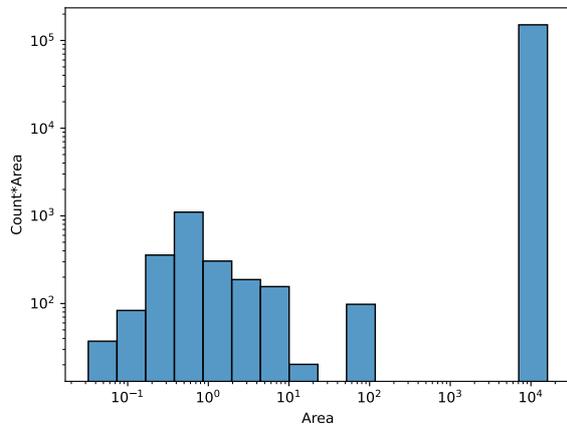
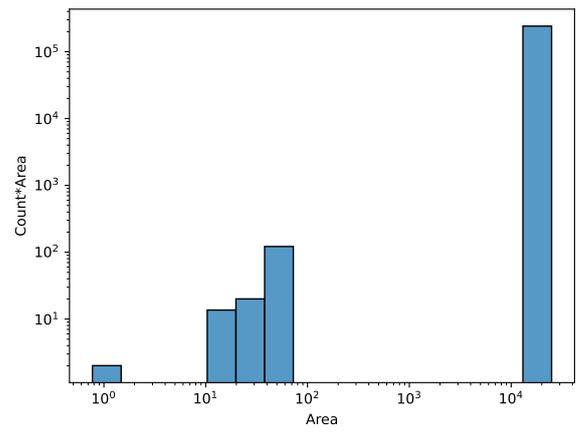
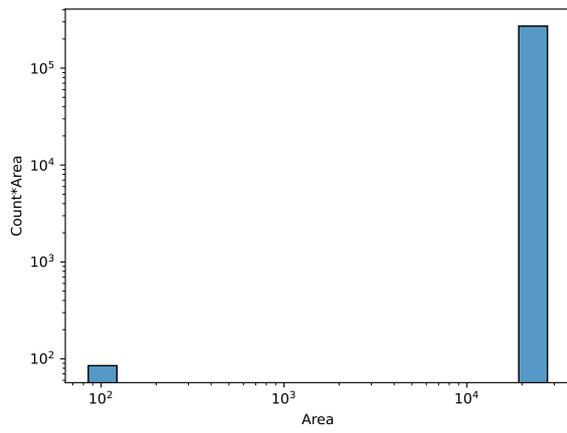


Рис. 4. Распределение доменных стенок по площадям для вакуумных начальных условий в моменты $\tau = 1, 5, 10, 15$.

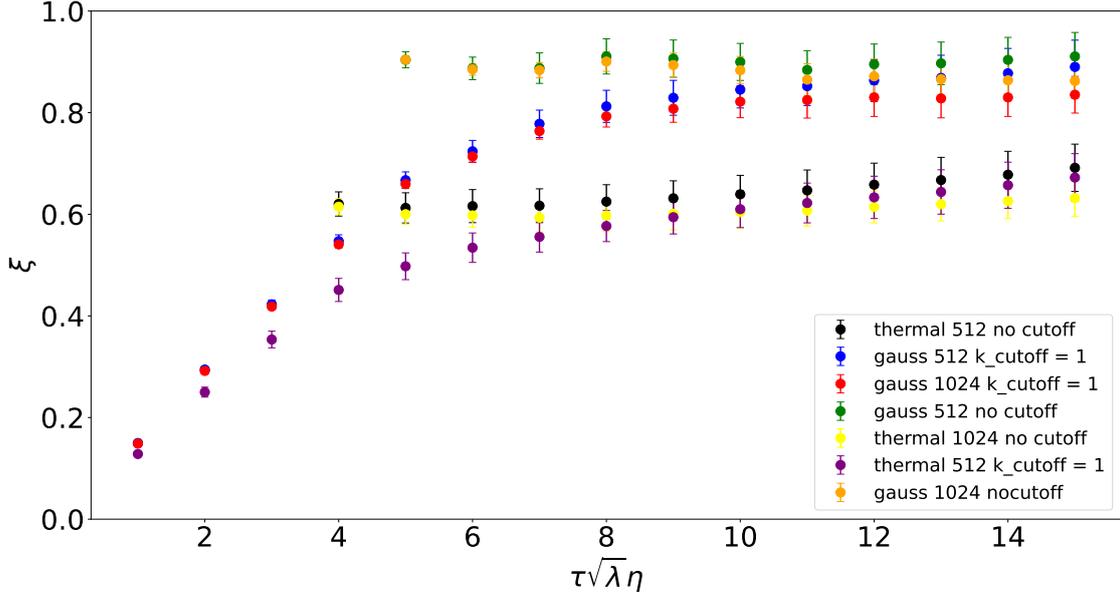


Рис. 5. Скейлинг-параметр ξ , определенный в (44), показан для решеток с $N = 512$ и $N = 1024$ для вакуумных и термальных начальных условий. Выход ξ на константу сигнализирует о начале скейлинга.

где A и V – сопутствующие площадь доменных стенок и объем, их содержащий. Тогда можно определить скейлинг-параметр ξ как

$$\xi = \frac{At}{a(t)V}. \quad (44)$$

Отметим, что параметр ξ является постоянным во время скейлинг-режима. Верно и обратное: непостоянство ξ указывает на отсутствие скейлинга. Численно площадь стенок можно определить с помощью формулы

$$A = \Delta A \cdot \sum_{\text{links}} \delta \cdot \frac{|\nabla\phi|}{|\phi_{,x}| + |\phi_{,y}| + |\phi_{,z}|}. \quad (45)$$

Суммирование здесь происходит по соседним парам точек решетки, $\Delta A = (\Delta x)^2$ – площадь одной ячейки решетки, Δx – сопутствующее расстояние между точками решетки. Величина δ принимает нулевое значение, если поле ϕ имеет одинаковый знак на соседних точках решетки, и равна единице, если поле меняет знак.

Результаты симуляций для параметра ξ представлены на Рис. 5. Мы используем решетки с $N = 512$ и $N = 1024$ для термальных и вакуумных начальных условий, с обрезанным и необрезанным спектром начальных возмущений. Поскольку результаты для $N = 512$ и $N = 1024$ хорошо согласуются друг с другом, мы считаем, что им можно доверять. Интересно, что начало скейлинга всегда приходится на $\tau_f \simeq 5$ в безразмерных единицах, или, возвращаясь к размерным величинам, в момент

$$\tau_f \simeq \frac{5}{\sqrt{\lambda\eta}}. \quad (46)$$

Это может быть выражено через отношение доменной стенки к размеру горизонта, а именно

$$\delta_w \simeq 0.06H^{-1} . \quad (47)$$

В то же время, из Рис. 5 видно, что система выходит на скейлинг-режим существенно различными путями в случаях с обрезанием спектра и без. В то время как в первом случае ξ выходит на константу снизу, во втором случае это происходит сверху после периода начального быстрого роста. Это может следовать из того факта, что начальные скалярные возмущения больше в случае без обрезания, что приводит к большему числу доменных стенок.

Отметим, что константы, на которые выходит параметр ξ , значительно различаются в случае термальных и вакуумных начальных условий. В случае вакуумных условий получим

$$\xi \simeq 0.8 \quad (48)$$

в то время как для термальных условий

$$\xi \simeq 0.6 . \quad (49)$$

Однако, в скейлинг-режиме ожидается независимость эволюции системы доменных стенок от начальных условий, начиная с некоторого момента времени. Это различие вряд ли можно объяснить различием в УФ части начального спектра скалярного поля, так как одинаковые начальные условия с обрезанным и необрезанным спектром приводят к одному значению ξ . Мы также проверили, что разница не зависит от размера решетки L . Всё это указывает на то, что различие в значениях ξ может иметь неизвестную физическую причину.

Из гистограмм на Рис. 4 видно, что одна большая стенка дает основной вклад в общую площадь стенок, а площадь замкнутых доменных стенок пренебрежимо мала, и маловероятно, что они могут отвечать за эффективный сброс энергии системы стенок, необходимый для установления наблюдаемого скейлинг-режима. Таким образом, из гистограмм можно предположить, что уменьшение энергии системы доменных стенок происходит за счет излучения частиц с большой стенки.

5. Результаты: гравитационные волны

5.1. Плотность энергии

Результаты для плотности энергии гравитационных волн ρ_{gw} представлены на Рис. 6. Видно, что плотность энергии выходит на константу, что соответствует результатам, полученным в разделе 2. Для кривых соответствующих вакуумным начальным условиям со спектром, обрезанным на $k_{cutoff} = \sqrt{\lambda}\eta$, и термальным начальным условиям, плотность энергии ρ_{gw} при больших τ принимает значение $\rho_{gw} \simeq 7 \times 10^{-6} \lambda \eta^4$. Вспоминая зависимость от параметров модели и массы Планка, то есть, $\rho_{gw} \propto \sigma_{dw}^2 / M_{Pl}^2$, и значение $\eta = 6 \times 10^{16}$ GeV,

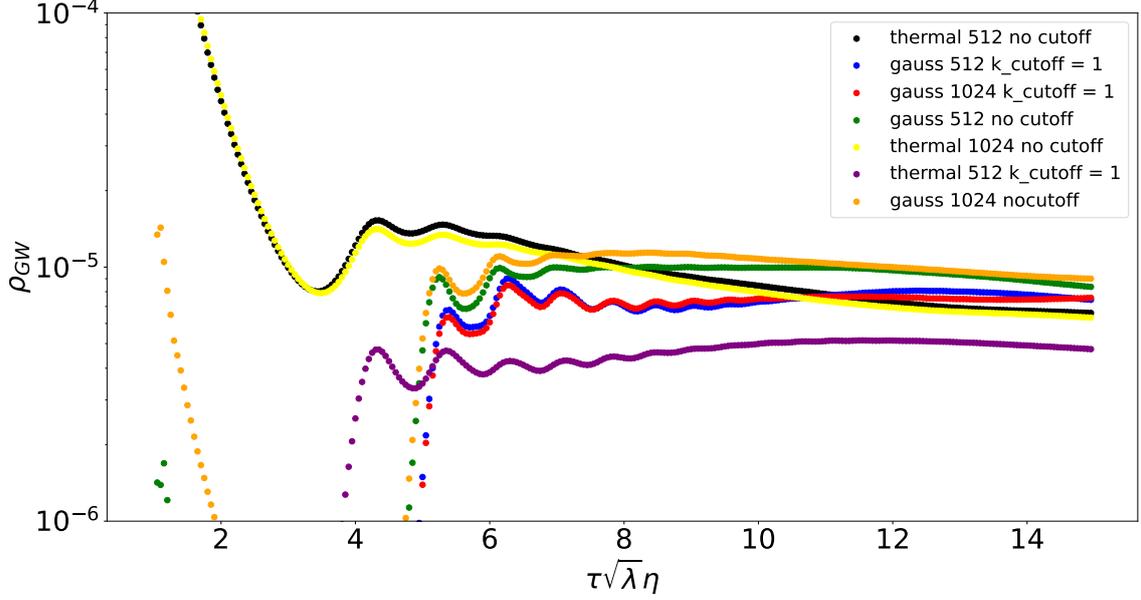


Рис. 6. Плотность энергии гравитационных волн, излученных системой доменных стенок.

получим

$$\rho_{gw} \simeq \frac{0.013\sigma_{dw}^2}{M_{Pl}^2}. \quad (50)$$

Снова мы видим, что плотность энергии в случае термальных начальных условий чуть меньше по сравнению с вакуумными начальными условиями. Это согласуется с разницей в значениях параметра ξ , хотя в этом случае разница не столь значительная.

Для сравнения с результатами, полученными в [1], выразим плотность энергии гравитационных волн с помощью безразмерной величины:

$$\epsilon_{gw} = \frac{\rho_{gw}}{G\xi^2\sigma_{gw}^2}. \quad (51)$$

Получим

$$\epsilon_{gw} \approx 0.5 \quad (\text{vacuum}), \quad (52)$$

$$\epsilon_{gw} \approx 0.9 \quad (\text{thermal}). \quad (53)$$

Эти значения находятся в хорошем согласии с полученными в [1].

5.2. Спектр гравитационных волн

Результаты численных симуляций спектров гравитационных волн для различных начальных условий показаны на Рис. 7 и 8. Помимо пика, соответствующего параметру Хаббла, можно видеть пик в УФ части спектра. Высота и положение пика зависят от разрешения решетки, а именно положение пика в терминах конформного импульса k уменьшается вдвое при переходе от решетки $N = 2048$ к решетке $N = 1024$. Это явно показывает, что проис-

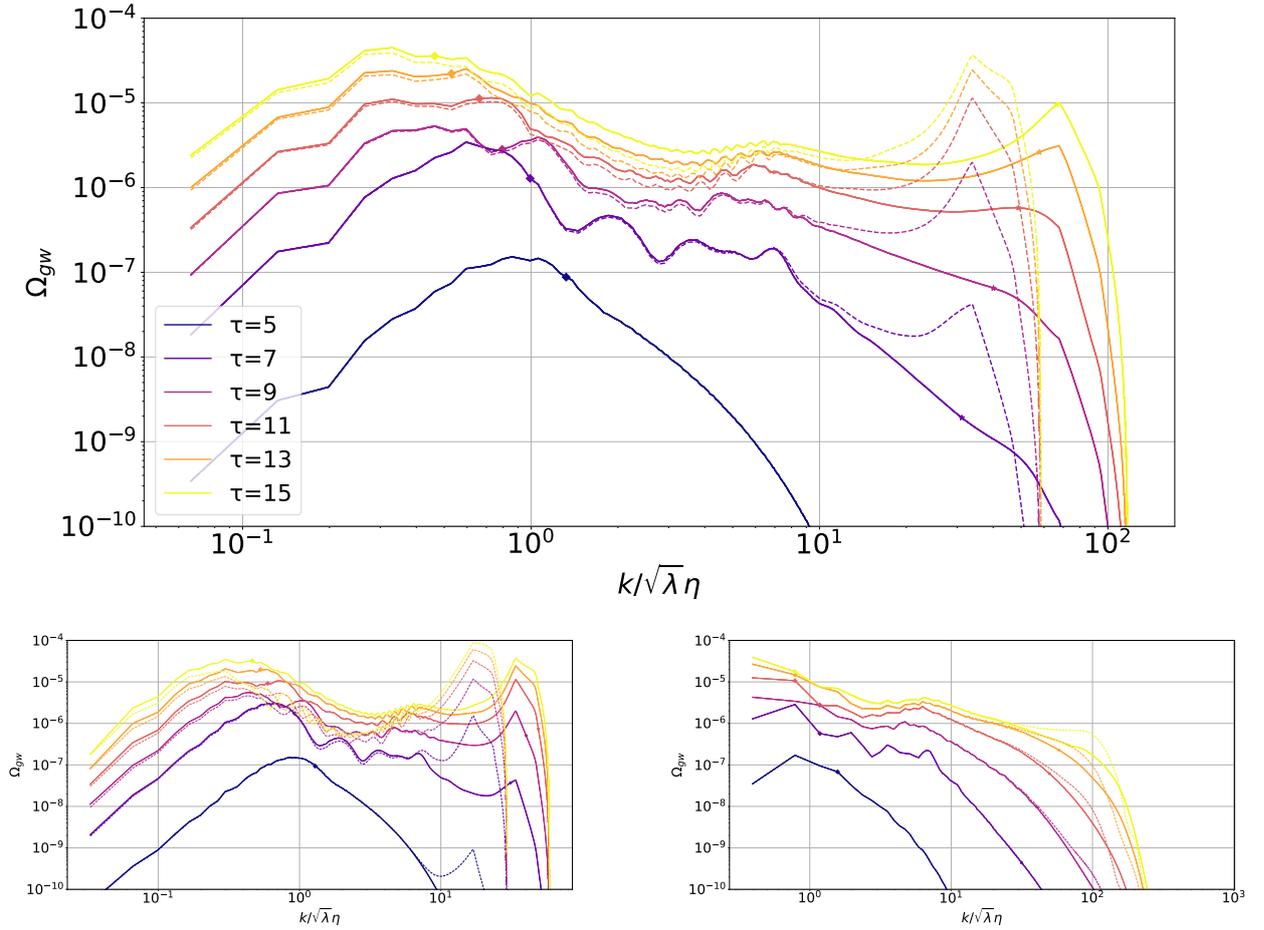


Рис. 7. Сравнение спектров гравитационных волн, полученных для вакуумных начальных условий для решеток с $N = 1024$ и $N = 2048$. Для верхнего спектра использованы оптимальные параметры из уравнения (41) с параметром $\alpha = 2\pi$. Для нижнего левого (правого) спектра использованы параметры из уравнения (41) с параметром $\alpha = 8\pi$ ($\alpha = \pi/18$), позволяя увидеть больше инфракрасной (ультрафиолетовой) части спектра. Отметки слева соответствуют параметру Хаббла $k = 2\pi H a$, отметки справа соответствуют обратной толщине доменной стенки δ_w^{-1} , то есть, $k = 2\pi \delta_w^{-1} a$.

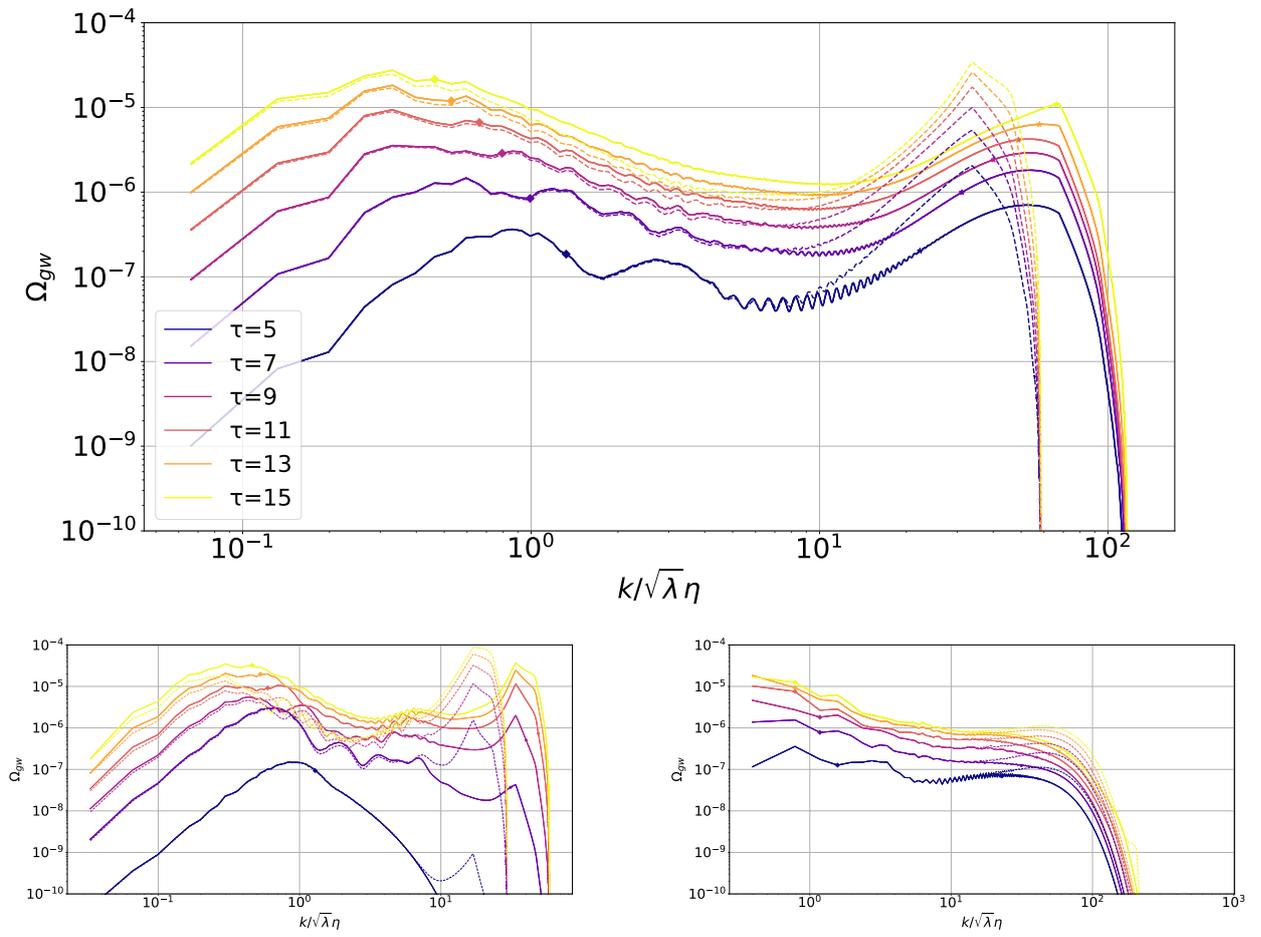


Рис. 8. То же, что на Рис. 7, но для термальных начальных условий.

хождение пика не имеет отношения к физике, и определяется шагом решетки.

Численный артефакт в спектре не является локализованным вблизи УФ пика, и загрязнение, вызванное конечным шагом решетки, распространяется в сторону инфракрасной части спектра. Это может сильно помешать интерпретации спектров гравитационных волн. Чтобы решить эту проблему, можно отбрасывать ту часть спектра, в которой результаты, полученные для $N = 1024$ и $N = 2048$ сильно различаются, и доверять лишь той части спектра, где они пересекаются.

Из Рис. 7 и 8 оценим пиковую частоту спектра гравитационных волн в случае вакуумных и термальных начальных условий:

$$F_{peak} = \frac{k_{peak}}{2\pi a_{dec}} \simeq 0.7 H_{dec} . \quad (54)$$

Здесь индекс '*dec*' означает момент разрушения доменных стенок. Вспомним, что это необходимо для того, чтобы избежать проблемы перекрытия Вселенной системой доменных стенок. Мы предполагаем, что стенки разрушаются на радиационно-доминированной стадии. Учитывая красное смещение частоты к настоящему моменту, получим:

$$f_{peak} = F_{peak} \cdot \frac{a_{dec}}{a_0} \simeq 0.7 H_{dec} \cdot \frac{a_{dec}}{a_0} \simeq 0.4 \text{ nHz} \left(\frac{T_{dec}}{100 \text{ MeV}} \right) \cdot \left(\frac{10}{g_*(T_{dec})} \right)^{1/3} , \quad (55)$$

где a_0 — современный масштабный фактор. Интересно, что пиковая частота получилась чуть меньшей, чем в [1], где она очень близка к параметру Хаббла, однако мы не считаем, что этой разнице стоит придавать большое значение. Из Рис. 7 и 8 мы получим максимум Ω_{gw} :

$$\Omega_{gw,peak}(\tau) \approx 4.6 (7.7) \times 10^{-10} \cdot \left(\frac{H_i}{H(\tau)} \right)^2 \cdot \left(\frac{\eta}{6 \cdot 10^{16} \text{ GeV}} \right)^4 \quad \text{термальные (вакуумные)} . \quad (56)$$

Это верно во время радиационно-доминированной стадии, до разрушения доменных стенок. Снова в целях сравнения с [1], можно записать $\Omega_{gw,peak}$ как

$$\Omega_{gw,peak}(\tau) \simeq \frac{8\pi \tilde{\epsilon}_{gw} \xi^2 G^2 \sigma_{dw}^2}{3H^2(\tau)} . \quad (57)$$

Здесь мы ввели безразмерную величину $\tilde{\epsilon}_{gw}$. Сравнивая (56) и (57), получим

$$\tilde{\epsilon}_{gw} \approx 0.3 . \quad (58)$$

По случайности, мы получили одинаковые значения $\tilde{\epsilon}_{gw}$ для термальных и вакуумных начальных условий. Это хорошо согласуется с результатами [1]. Учитывая красное смещение во время стадий доминирования материи и темной энергии, можно записать

$$\Omega_{gw,peak} h_0^2 \simeq 0.6 (1) \cdot 10^{-10} \cdot \left(\frac{100 \text{ MeV}}{T_{dec}} \right)^4 \cdot \frac{\sigma_{wall}^2}{(100 \text{ TeV})^6} \cdot \left(\frac{10}{g_*(T_{dec})} \right)^{4/3} \quad \text{термальные (вакуумные)} . \quad (59)$$

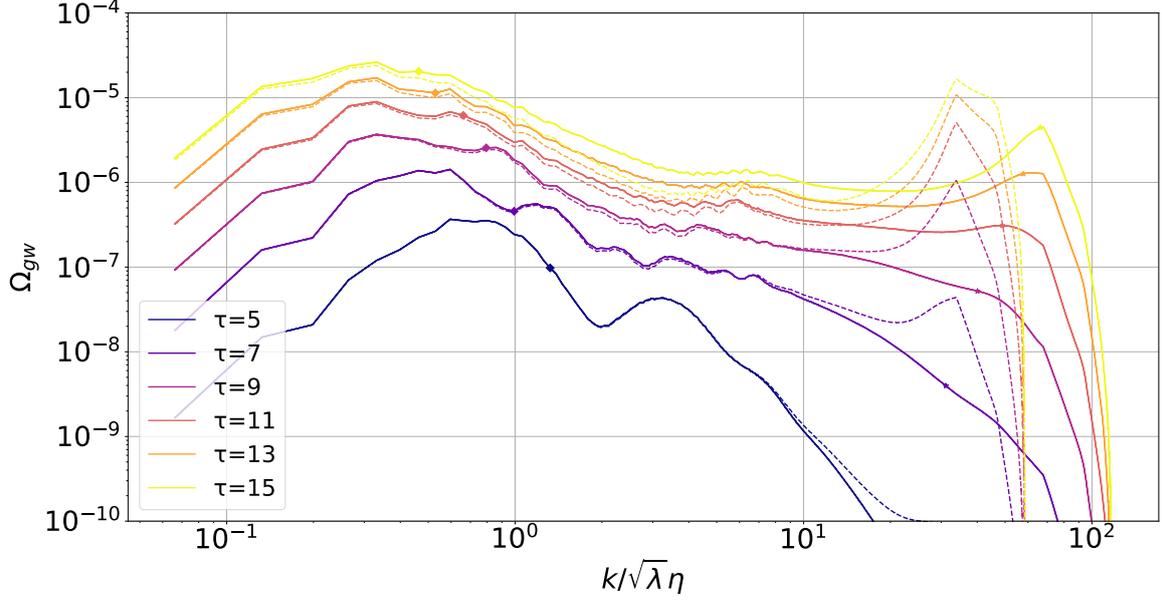


Рис. 9. То же, что на Рис. 7, но для термальных начальных условий с обрезанием спектра на $k_{cutoff} = 1$.

Инфракрасная часть спектра ведет себя в соответствии с соображениями причинности, то есть

$$\Omega_{gw} h_0^2 \propto k^3 \quad k \ll k_{peak} . \quad (60)$$

Справа от пика наклон спектра ведет себя как

$$\Omega_{gw} h_0^2 \propto k^{-1.3} \quad k_{peak} < k < k_* . \quad (61)$$

Здесь k_* — характерный масштаб, на котором спад в спектре переходит в (почти) плоскую его часть, то есть

$$\Omega_{gw} h_0^2 \simeq \text{const} \quad k_* < k < 2\pi a / \delta_w . \quad (62)$$

Отметим, что эта часть спектра не является в точности плоской. А именно, в случае вакуумных начальных условий присутствует небольшой пик. Это же наблюдение было сделано в [6]. По-видимому, этот небольшой пик является артефактом, возникающим из-за резкого обрезания в вакуумном спектре. Этот же пик появляется в случае обрезанных термальных начальных условий, как видно из Рис. 9. Масштаб k_* можно оценить из Рис. 7 и 8. Интересно, что положение k_* примерно постоянно во времени, и не зависит от начальных условий. Наконец, для импульсов, больших, чем обратная толщина стенки/масса скалярного поля $k > 2\pi a / \delta_w$, наблюдается экспоненциальный спад.

Можно объединить спектры с нижней части Рис. 7 для вакуумных условий (Рис. 8 для термальных условий), чтобы получить полный спектр гравитационных волн, в котором нет численного артефакта в УФ части, и в то же время видна ИК часть. Это возможно потому, что оба графика получаются из решения одного и того же уравнения с одинаковыми начальными условиями. Именно так были получены наши основные результаты на Рис. 1.

6. Итоги

В этой работе была проанализирована эволюция системы доменных стенок и спектр гравитационных волн, излученных ей. Было показано, каким образом можно извлечь достоверную информацию о спектре гравитационных волн и избавиться от численных артефактов, возникающих из-за конечного разрешения или конечного размера решетки.

В процессе работы возникло несколько вопросов. Например, параметр ξ , определенный в (5), принимает различные значения в случае термальных и вакуумных начальных условий. Мы проверили, что разницу вряд ли можно объяснить конечным шагом или размером решетки. Таким образом, у этого может быть физическое объяснение, которое еще предстоит найти. Аналогично, спектральная плотность энергии в пике также оказывается различной.

В будущем интересно было бы экстраполировать результаты этой работы на доменные стенки с переменным натяжением. Этот сценарий интересен тем, что доменные стенки с уменьшающимся натяжением позволяют избежать проблемы перекрытия Вселенной [3–5]. В этом случае ожидается значительно иной спектр по сравнению с полученным в данной работе, а именно, предсказывается форма спектра $\Omega_{gw} \propto f^2$. Этот результат получен в предположении, что система доменных стенок входит в режим скейлинга, что еще не было доказано в этом случае.

Список литературы

1. T. Hiramatsu, M. Kawasaki and K. Saikawa, JCAP **02** (2014), 031; [arXiv:1309.5001 [astro-ph.CO]].
2. Y. Li, L. Bian and Y. Jia, [arXiv:2304.05220 [hep-ph]].
3. S. Ramazanov, E. Babichev, D. Gorbunov and A. Vikman, Phys. Rev. D **105** (2022) no.6, 063530; [arXiv:2104.13722 [hep-ph]].
4. E. Babichev, D. Gorbunov, S. Ramazanov and A. Vikman, JCAP **04** (2022) no.04, 028; [arXiv:2112.12608 [hep-ph]].
5. E. Babichev, D. Gorbunov, S. Ramazanov, R. Samanta and A. Vikman, Phys. Rev. D **108** (2023) no.12, 123529; [arXiv:2307.04582 [hep-ph]].
6. R. Z. Ferreira, S. Gasparotto, T. Hiramatsu, I. Obata and O. Pujolas, [arXiv:2312.14104 [hep-ph]].